20/03/2017

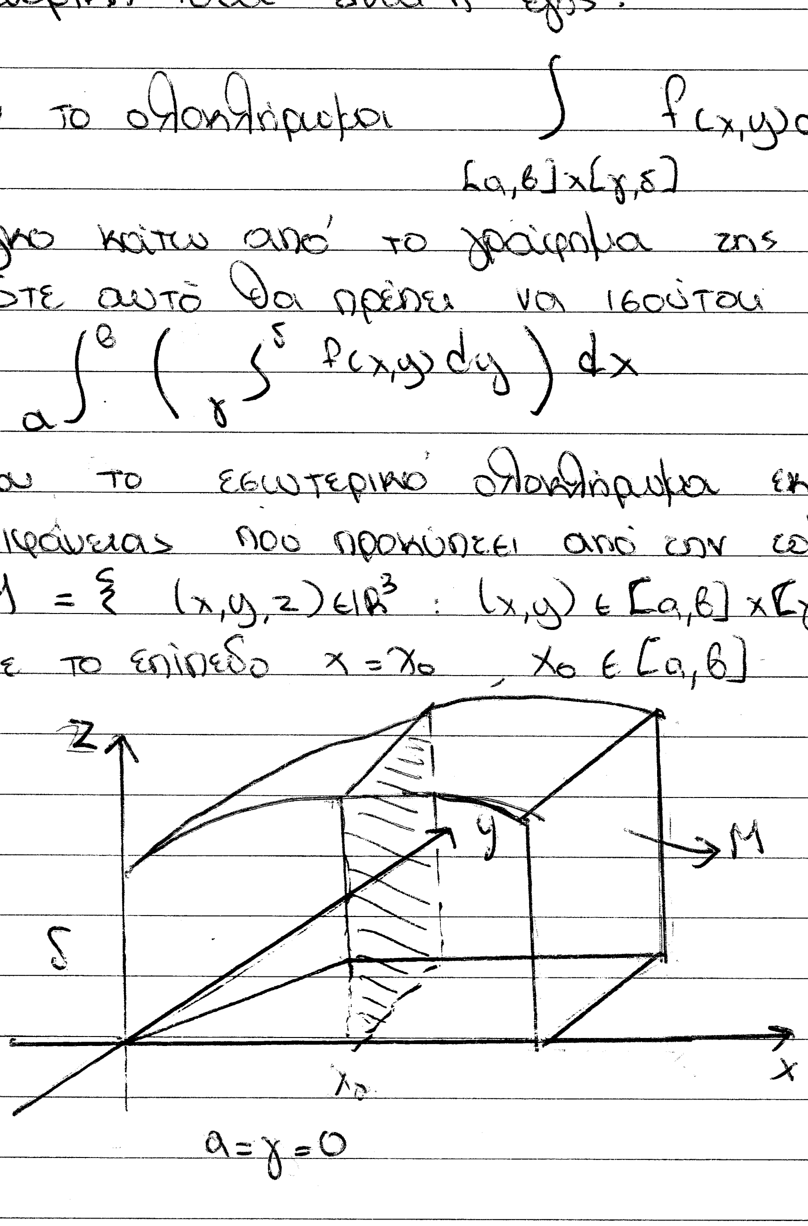
Μάθημα 5ο
Απει 4

Το βασικότερο εργαλείο για τον υπολογισμό πολλαπλών ολοκληρωμάτων είναι το Θεώρημα του Fubini, του οποίου η κεντρική ιδέα είναι η εξής:

Αν το ολοκλήρωμα $\int_{[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]} f(x,y)\,d(x,y)$ εκφράζει τον όγκο κάτω από το γράφημα της $f:[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$, $f\geq 0$, τότε αυτό θα πρέπει να ισούται με το:

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy \right) dx$$

όπου το εσωτερικό ολοκλήρωμα εκφράζει (για κάθε $x=x_0$) το εμβαδό της επιφάνειας που προκύπτει από την τομή του
$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta],\ 0\leq z\leq f(x,y)\}$
με το επίπεδο $x=x_0$, $x_0\in[\alpha,\beta]$



Στη μορφή αυτή το Θεώρημα Fubini ονομάζεται <u>Αρχή του Cavalieri</u>

(*) $\bar{y} \mapsto f(\bar{x},\bar{y})$
$\bar{x}$ σταθερό

Θεώρημα Fubini (κλασική μορφή)

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ κλειστά ορθογώνια και $f: A\times B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Αν οι (*) $f(\bar{x}, \cdot): B \to \mathbb{R}$ για κάθε $\bar{x} \in A$ είναι ολοκληρώσιμες, τότε η $A \ni \bar{x} \to \int_B f(\bar{x},\bar{y})\,d\bar{y} \in \mathbb{R}$

είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει:

$$\int_{A\times B} f(\bar{x},\bar{y})\,d(\bar{x},\bar{y}) = \int_A \left(\int_B f(\bar{x},\bar{y})\,d\bar{y} \right) d\bar{x}$$

απεικονίζει το
εμβαδό στο σημείο

Το πιο πάνω θεώρημα είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Fubini (γενική μορφή):

Θεώρημα Fubini (γενική μορφή):

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, κλειστά ορθογώνια και $f: A\times B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Τότε:

οι συναρτήσεις
- $\mathcal{L}: A \ni \bar{x} \mapsto L_{f(\bar{x},\cdot)} \in \mathbb{R}$
  (το κάτω ολοκλήρωμα της $f(\bar{x},\cdot)$)
- $\mathcal{U}: A \ni \bar{x} \mapsto U_{f(\bar{x},\cdot)} \in \mathbb{R}$
  (το πάνω ολοκλήρωμα της $f(\bar{x},\cdot)$)

είναι ολοκληρώσιμες και ισχύει:

$$\int_{A\times B} f = \int_A \mathcal{L} = \int_A \mathcal{U}$$

$$= \int_{A\times B} f(\bar{x},\bar{y})\,d(\bar{x},\bar{y}) = \int_A \mathcal{L}(\bar{x})\,d\bar{x} = \int_A \mathcal{U}(\bar{x})\,d\bar{x}$$

Απόδειξη.

① Αφού $f: A\times B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη $\Rightarrow$ φραγμένη.

$\Rightarrow \forall \bar{x} \in A : f(\bar{x}, \cdot) : B \to \mathbb{R}$ φραγμένες
$\bar{y} \mapsto f(\bar{x}, \bar{y})$

$\Rightarrow \forall \bar{x} \in A : \underbrace{L_{f(\bar{x},\cdot)}}_{\mathcal{L}(\bar{x})}, \underbrace{U_{f(\bar{x},\cdot)}}_{\mathcal{U}(\bar{x})} \in \mathbb{R}$.

② Οι $\mathcal{L}, \mathcal{U} : A \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένες :

$\forall \bar{x} \in A : \inf f \cdot V(B) \leq [\inf f(\bar{x},\cdot) \cdot V(B)$
$\leq L_{f(\bar{x},\cdot)}] = \mathcal{L}(\bar{x})$
$\leq \mathcal{U}(\bar{x}) [= U_{f(\bar{x},\cdot)} \leq \sup f(\bar{x},\cdot) \cdot V(B)] \leq \sup f \cdot V(B)$

③ Από το ② προκύπτει ότι οι $\mathcal{L}, \mathcal{U}$ είναι φραγμένες
($\Rightarrow$ υπάρχουν τα κάτω και άνω ολοκληρώματά τους
$L_{\mathcal{L}}, U_{\mathcal{L}}$ και $L_{\mathcal{U}}, U_{\mathcal{U}}$).

Μένει να δείξουμε ότι $\mathcal{L}, \mathcal{U}$ είναι ολοκληρώσιμες
με $\int_A \mathcal{L} = \int_{A\times B} f = \int_A \mathcal{U}$

Θα το δείξουμε αυτό για το $\mathcal{L}$ (για το $\mathcal{U}$ αντίστοιχα)

[Σ. Παρατήρηση: Αν οι $f(\bar{x},\cdot): B \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες, τότε
$\mathcal{L}(\bar{x}) = \int_B f(\bar{x},\bar{y})\, d\bar{y} = \mathcal{U}(\bar{x})$ και προκύπτει η κλασική μορφή

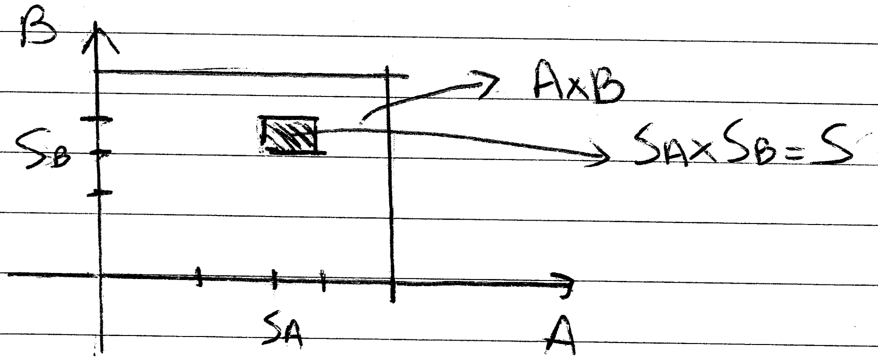
του Θεωρήματος Fubini :

$$\int_A \left(\int_B f(\bar{x},\bar{y})\, d\bar{y} \right) = \int_{A\times B} f$$]]

(4) Η απόδειξη ότι $\int_A \mathcal{L}(\bar{x})\,d\bar{x}$ υπάρχει $(\in \mathbb{R})$ και $= \int_{A\times B} f(\bar{x},\bar{y})\,d(\bar{x},\bar{y})$

- Έστω $P \in \mathcal{P}(A\times B) \Rightarrow P = P_A \times P_B$ με $P_A \in \mathcal{P}(A)$, $P_B \in \mathcal{P}(B)$ και
- $\mathcal{S}_P = \{ S = S_A \times S_B : S_A \in \mathcal{S}_{P_A}, S_B \in \mathcal{S}_{P_B} \}$

$$\Rightarrow L(f,P) = \sum_{S \in \mathcal{S}_P} \inf f|_S \cdot V(S)$$



$$\Rightarrow L(f,P) = \sum_{S\in\mathcal{S}_P} \underbrace{\inf f|_S}_{=\ \inf f|_{S_A\times S_B}} \underbrace{V(S)}_{=\ V(S_B)} = \sum_{S_A \in \mathcal{S}_{P_A}} \sum_{S_B \in \mathcal{S}_{P_B}}$$

Όμως: $\inf f|_{\underset{S}{\underset{\parallel}{S_A\times S_B}}} \leq f(\bar{x},\bar{y})$ $\underbrace{\forall \bar{x} \in S_A\ \forall \bar{y} \in S_B}$

$\Leftrightarrow \forall (\bar{x},\bar{y}) \in S_A \times S_B$

$$\Rightarrow \inf f|_{S_A\times S_B} \leq \inf f(\bar{x},\cdot)|_{S_B} \quad \forall \bar{x}\in S_A$$

$$\Rightarrow L(f,P) = \sum_{S_A \in \mathcal{S}_{P_A}} \underbrace{\sum_{S_B \in \mathcal{S}_{P_B}} \inf f(\bar{x},\cdot)|_{S_B} \cdot V(S_B)}_{=\ L(f(\bar{x},\cdot),P_B)} \cdot V(S_A)$$

$$\leq \underline{L} f(\bar{x},\cdot) = \mathcal{L}(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in A$$

Το οποίο συνεπάγεται και ότι :

$$\sum_{S_B \in \mathfrak{S}_{S_B}} \inf f|_{S_A\times S_B} V(S_B) \le \sum_{S_B \in \mathfrak{S}_{P_B}} \inf f(\bar{x},\cdot)|_{S_B} \cdot V(S_B)$$

$$\le \mathcal{L}(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in S_A$$

$$\Rightarrow \sum_{S_B \in \mathfrak{S}_{S_B}} \inf f|_{S_A\times S_B} V(S_B) \le \inf \mathcal{L}|_{S_A}$$

$$\Rightarrow L(f,P) \le \sum_{S_A \in \mathfrak{S}_{P_A}} \inf \mathcal{L}|_{S_A} V(S_A) =$$

$$= L(\mathcal{L},P_A) \le L_{\mathcal{L}} \quad \forall P \in \mathcal{P}(A\times B)$$

Αντίστοιχα, (αλλάζοντας τα inf σε sup και τα $\le$ σε $\ge$) έχουμε $U_{\mathcal{L}} \le U(f,P) \quad \forall P \in P(A\times B)$

(3) (4) $\Rightarrow \quad L(f,P) \le L_{\mathcal{L}} \le U_{\mathcal{L}} \le U(f,P) \quad \forall P \in P(A\times B)$

$$\Rightarrow L_f \le L_{\mathcal{L}} \le U_{\mathcal{L}} \le U_f \xRightarrow{f \text{ ολοκλ.}}$$

$$\Rightarrow \underset{\displaystyle \int_{A\times B} f}{\underset{\|}{L_f}} = \underbrace{L_{\mathcal{L}} = U_{\mathcal{L}}}_{\displaystyle \underset{\displaystyle \int_A \mathcal{L}}{\|}} = \underset{\displaystyle \int_{A\times B} f}{\underset{\|}{U_f}}$$

Πόρισμα : (MEGA_SOS)
Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ κλειστά ορθογώνια και $f : A \times B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Αν οι $f(\bar{x},\cdot) : B \to \mathbb{R}$ και $f(\cdot,\bar{y}) : A \to \mathbb{R}$ $\forall \bar{x} \in A$ και $\forall \bar{y} \in B$, αντίστοιχα, είναι ολοκληρώσιμες, τότε από το θεώρημα Fubini (κλασική μορφή) έχουμε ότι

$$\int_A \left(\int_B f(\bar{x},\bar{y})\, d\bar{y} \right) d\bar{x} \left[= \int_{A \times B} f(\bar{x},\bar{y})\, d(\bar{x},\bar{y}) \right] \doteq$$

$$= \int_B \left(\int_A f(\bar{x},\bar{y})\, d\bar{x} \right) d\bar{y}$$

Παρατήρηση: Θα δούμε ότι: Συνεχείς συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό ορθογώνιο, είναι ολοκληρώσιμες

Πόρισμα: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής

$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$

$$\Rightarrow \int_A f(x_1, \dots, x_n)\, d(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_n \right) \dots \right) dx$$

επαναληπτική ολοκλήρωση